

Э. А. Локтионова, Д. И. Борзёнкова

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ ОБЩЕСТВА

В данной статье рассматривается иллюстрация возможности применения интегралов для анализа неравномерности распределения доходов населения между различными социальными группами в обществе.

Ключевые слова: кривая Лоренца, коэффициент Джини, выигрыши потребителей и поставщиков, распределение доходов.

UDC 517.3:330.4

E.A. Loktionova, D.I. Borzyonkova

APPLICATION OF INTEGRAL CALCULUS FOR THE ANALYSIS OF SOCIETY SOCIAL AND ECONOMIC STRUCTURE

In the article the illustration of possibility of integrals application for the analysis of non-uniformity of population incomes distribution between various social groups in the society is considered.

Keywords: Lorentz's curve, Jinny factor, prize of consumers and suppliers, incomes distribution.

При формировании доходов сохраняются условия неравенства их распределения между семьями и группами населения. Это обусловлено тем, что население формирует свои доходы в основном за счет трех главных источников: заработная плата, доходы от собственности (дивиденды, проценты, рента), доходы в виде социальных выплат (пенсии, пособия по уходу за детьми, пособия по безработице и т. д.). Естественно, что значимость этих источников для различных семей различна.

В экономической литературе существуют разные методы определения уровня жизни и дифференциации населения по доходам.

Одним из первых оценку уровня жизни осуществил немецкий статистик Эрнст Энгель (1821–1896), установивший зависимость доли потребления продуктов питания от уровня доходов семьи. При этом Э. Энгель сделал вывод о том, что чем беднее семья, тем большая доля всех расходов выделяется для приобретения продуктов питания.

Это положение вошло в экономическую теорию в виде «закона Энгеля». «Закон Энгеля» гласит: с ростом доходов семьи удельный вес расходов на пищу снижается; на одежду, жилище, отопление и освещение мало меняется - на удовлетворение культурных потребностей увеличивается.

Для характеристики степени дифференциации доходов по группам населения в экономической теории используется кривая Лоренца, названная по имени американского экономиста и статистика М. Лоренца (1876–1959) [3]. Она графически отображает неравномерность распределения совокупного дохода между различными группами населения. Для этого по методу Лоренца на графике по горизонтали откладываются процентные группы населения, а по вертикали – проценты дохода, получаемые этими группами. В результате образуется квадратура, в которой биссектриса OE координатного угла отражает абсолютное равенство распределения всего дохода (рис. 1).



Рисунок 1 - Кривая Лоренца

М. Лоренц установил, что в экономических системах с равным распределением доходов 20 % населения получают 20 % всего дохода, 40 % населения – 40 % всего дохода, 60 % населения – 60 % всего дохода и т. д. В этом случае кривая Лоренца принимает вид прямой (линия абсолютного равенства). Эта ситуация означает полное отсутствие концентрации доходов в руках какой-либо группы населения, чего в реальной жизни не бывает.

Абсолютное неравенство характеризуется кривой OFE, означающей, что и 20 %, и 40 %, и 60 % населения не получают никаких доходов, за исключением одного единственного, последнего в ряду OF человека, который присваивает 100 % всего дохода.

В действительности фактические доходы соответствуют ломаной линии OABCDE – кривой Лоренца, или кривой распределения доходов. Чем больше отклоняется кривая Лоренца от линии OE, тем больше неравенство в распределении доходов.

В конкретных случаях нельзя ожидать ни абсолютного равенства, ни абсолютного неравенства в распределении доходов среди населения. Абсолютное неравенство — это тот гипотетический случай, когда все население, за исключением одного человека или одной семьи, не имеет доходов, а этот один (одна семья) получает весь доход.

Пусть численность населения равна L, а функция $y = F(x)$ описывает распределение доходов. Данная функция характеризует ту часть населения, у которой доход ниже x. Предположим, что $F(100) = 0,1$. Это означает, что доля людей, чьи доходы ниже 1000 руб., составит 10%.

Функция $y = F(x)$ обладает следующими свойствами:

1. Обычно существует уровень x, хуже которого никто не живет.
2. Функция $y = F(x)$ всегда возрастает, так как чем больше уровень дохода x, тем больший процент населения имеет доход ниже определенного уровня, т.е. тем больше $F(x)$.

Графически кривая Лоренца представляет собой кривую в системе координат. По оси абсцисс откладывают долю семей в процентах от общего их числа, а по оси ординат – долю доходов в процентах от общей суммы.

В прямоугольной системе координат кривая Лоренца является выпуклой вниз и проходит под диагональю единичного квадрата с координатами (0;0); (0,1); (1;1) и (1;0). При равном распределении доходов каждая группа населения будет иметь доход, пропорциональный своей численности. Чем меньше отклонение кривой от диагонали, тем меньше степень неравномерности распределения доходов [2]. Кривая Лоренца находится в интервале $0 \leq F(x) \leq x$, x принадлежит промежутку [0;1].

Степень дифференциации в распределении доходов определяется с помощью коэффициента Джини, по имени итальянского экономиста и статистика Коррадо Джини (1884–1965), который рассчитывается путем деления площади OABCDE на площадь треугольника OFE [1]. Чем больше величина этого коэффициента, тем больше отклоняется фактическое распределение дохода от абсолютного равенства.

$$K_{\text{Джини}} = \frac{Soabcde}{\Delta OFE} = \frac{Soabcde}{0,5} \quad (1)$$

Чем выше индекс Джини, тем выше неравномерность распределения доходов населения и, следовательно, выше расслоенность общества.

Рассмотрим применение коэффициента Джини на конкретном примере.

Предположим, что распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца вида $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$. Требуется определить, какую часть дохода получают 12% низкооплачиваемого населения и рас-

считать значение коэффициента Джини. Подставляя в исходную функцию $x = \frac{12}{100} = 0,12$, получим:

$$y(0,12) = \frac{11}{12}(0,12)^2 + \frac{1}{12} \cdot 0,12 = 0,0232$$

Следовательно, 12% низкооплачиваемого населения составляют 2,32% общего дохода.

Найдем площадь фигуры OABCDE с помощью интеграла:

$$Soabcde = \int_0^1 \left(x - \frac{11}{12}x^2 - \frac{1}{12}x\right) dx = \frac{11}{12} \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{11}{12} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$Soabcde = \frac{11}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{72}$$

Подставим найденное значение в формулу (1) и получим:

$$K_{\text{Джини}} = \frac{Soabcde}{0,5} = \frac{11}{72} \cdot 2 = \frac{11}{36}$$

Неравенство распределения доходов можно иллюстрировать с помощью таблиц. Чтобы составить таблицу, надо население принять за сто процентов и разбивать на группы (квантили), равные по численности. Обычно выделяют пять квантилей, то есть по двадцать процентов в каждом квантиле. Первый квантиль составляют самые бедные семьи, далее по возрастанию дохода. Соответственно пятый (верхний) квантиль – самые богатые семьи. И в графу, соответствующую каждому квантилю, вписывают удельный вес совокупного дохода, приходящуюся на данный квантиль.

Индекс Джини имеет некоторые преимущества и недостатки.

К преимуществам относят:

1. Дополнение данных о среднестатистическом доходе и ВВП, также служит своеобразной поправкой данных показателей.

2. Используется для сравнения распределения дохода между различными совокупностями, например, разными странами. При этом не существует зависимости от масштаба экономики сравниваемых стран, также не рассматривает является ли это богатой или бедной страной.

3. Используется для сравнения распределения дохода по разным группам населения (например, индекс Джини для городской части населения и индекс Джини для сельского населения). Однако в США городские и сельские индексы Джини почти идентичны.

4. Дает возможность сравнивать распределение дохода в совокупностях с различным числом единиц (например, области с разной численностью населения).

5. Следит за динамикой неравномерности распределения дохода на разных этапах.

6. Анонимность. Является одним из основных преимуществ индекса Джини. Этот принцип означает, что нет необходимости знать, кто имеет какие доходы персонально.

7. Принцип передачи дохода. Данное преимущество означает, что если доход передан от богатого человека бедному, то распределение является более равным.

Недостатками коэффициента Джини являются:

1. Различия в методах сбора статистических данных для вычисления индекса Джини приводят к сложностям в сопоставлении полученных результатов.

2. Достаточно часто в индексе Джини отсутствует информация о том, на какие квантили поделена совокупность. Чем больше квантилей, тем выше значение индекса Джини и наоборот, чем меньше квантилей, тем меньше значения коэффициента.

3. Индекс Джини не учитывает источник дохода, то есть для определенной страны или региона данный показатель может быть достаточно низким, но при этом какая-то доля населения обеспечивает свой доход за счет труда, а другая – за счет собственности.

4. Метод кривой Лоренца и индекса Джини при исследовании доходов населения имеют дело лишь с денежными доходами, однако некоторым работникам выдают заработную плату в виде продуктов питания, а также в виде опционов на покупку акций компании-работодателя.

В 2012 году Россия стала мировым лидером по неравенству распределения доходов. На долю одного процента россиян приходится 71 процент личных активов в стране. В мире в среднем на один процент самых богатых приходится 46 процентов активов. В США этот показатель составляет 37 процентов (0,370), в Китае и Европе - 32 процента (0,320), в Японии - 17 процентов (0,170). Россия лидирует в мире и по доле самых состоятельных [4].

Согласно статистике Китая, в этой стране индекс Джини в 2012 году составил 0,474 и за прошедшие 10 лет коэффициент достиг локального максимума в 2008 году, когда составлял 0,491.

Коэффициент Джини колеблется по разным странам от 0,30 до 0,80. Значение его больше в неразвитых странах, меньше – в Швеции, Японии и Канаде.

Наряду с коэффициентом Джини для оценки степени социального неблагополучия используется также коэффициент расслоения общества на бедных и богатых. Он определяется отношением доходов 20% самых богатых семей к доходам 20% самых бедных. Зависимость количества квантилей от коэффициента Джини прямопропорциональная. Чем больше количество квантилей, на которые поделено население, тем больше будет коэффициент Джини.

Интересной иллюстрацией возможности применения интегрального исчисления для анализа социально-экономического строения общества является ситуация рыночного равновесия потребителей и поставщиков, которые могут получать выгоду, называемую выигрышем потребителей и поставщиков.

Пусть функция $D = f(x)$ описывает кривую спроса, а функция $S = g(x)$ – кривую предложения S , тогда доход от реализации товаров определяется по формуле:

$$P = p_e \cdot x_e \quad (2)$$

где p_e – равновесная цена,
 x_e – равновесный объем производства.

Рыночное равновесие позволяет потребителям и поставщикам получать дополнительную и взаимную выгоду от обмена. В этом проявляется польза для общества в установлении равновесной цены.

На рисунке 2 графически представлены выигрыш потребителей и поставщиков.

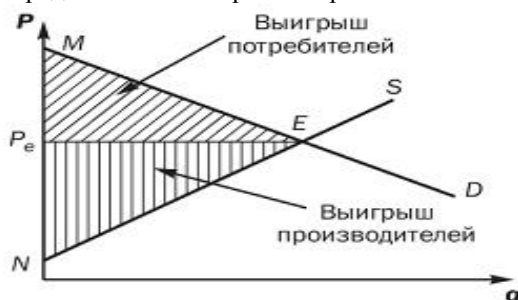


Рисунок 2 - Выигрыш потребителей и поставщиков

Выигрыш потребителей – это величина денежных средств, которую сберегают потребители, если продажа товара произведена по рыночной цене. Формула, описывающая выгоду потребителей [2]:

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_e p_e \quad (3)$$

Выигрыш поставщиков – это величина денежных средств, которые экономит поставщик, продавая товары по равновесной цене [2].

$$P = x_e p_e - \int_0^{x_0} g(x)dx \quad (4)$$

Общая выгода от обмена будет равна сумме излишка потребителя и поставщика:
 Общая выгода составит:

$$C+P = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_e p_e + x_e p_e - \int_0^{x_0} g(x)dx = \int_0^{x_0} (f(x) - g(x))dx \quad (5)$$

Рассмотрим данную ситуацию на конкретном примере.

Пусть известны закон спроса и предложения $D(x) = 12-2x$, $S(x) = x+3$. Требуется найти выигрыш покупателей и поставщиков в условиях рыночного равновесия. Эта ситуация означает, что в экономике произведено товаров столько, сколько требуется покупателю, то есть спрос будет равен предложению ($D(x) = S(x)$).

Используя условие равновесия, найдем значение x , при котором спрос будет равен предложению на рынке:

$$12-2x = x+3, \text{ откуда } 3x = 9, \text{ тогда } x_e = 3,$$

Подставляя найденное значение в функцию $D(x)$, найдем значение равновесного спроса: $D(3)=12-6=6$
 Следовательно, точка равновесия – А (3;6)

По формуле (3) излишек производителя составит:

$$C = \int_0^3 (12 - 2x)dx - 3 \cdot 6 = \left(12x - \frac{2x^2}{2}\right) \Big|_0^3 - 18 = 9$$

По формуле (4) определим излишек поставщика:

$$P = 3 \cdot 6 - \int_0^3 (x + 3)dx = 18 - \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right) \Big|_0^3 = 4,5$$

Общая выгода от обмена составит 13,5.

В современных условиях интегральное исчисление получило широкое применение в анализе социально-экономического строения общества.

Подводя итог, можно сказать, что интегральное исчисление является не только средством решения прикладных экономических задач, но и универсальным языком всей экономической теории, создает новые возможности для экономических исследований.

Сегодняшняя экономическая наука сильно математизирована. Трудно назвать область, в которой не применялись бы методы интегрального исчисления. Рассмотренные модели находят широкое применение на практике. При подготовке налоговых реформ рассчитывают изменения потребительских излишков в зависимости от различных вариантов налогообложения. Анализ полученных результатов позволяет экономистам рассчитать необходимый размер налоговых поступлений с учетом наименьшего сокращения потребительских выгод.

Список литературы:

1. Ильенкова, Д. М. Макроэкономическая статистика [Текст]: учеб. / Д. М. Ильенкова. – М.: Финансы и статистика, 2009. – 544 с..
2. Нуреев, Р.Н. Курс микроэкономики [Текст]: учеб. для вузов / Р. Н. Нуреев. – М.: «Норма», 2008. – 572с.
3. Загородняя, М. В. Моделирование уровня жизни населения [Электронный ресурс] / М. В. Загородняя. – Режим доступа: . http://otherreferats.allbest.ru/emodel/00141709_0.html. Дата обращения: 28.0. 2013.
4. Гуриев, С. Россия – лидер по неравенству распределения богатства [Электронный ресурс] / С. Гуриев, О. Цывинский. – Режим доступа: http://www.vedomosti.ru/opinion/news/5739241/pervaya_sredi_neravnyh. Дата обращения: 29.04.2013.

Борзёнок Дарья Ивановна

*студентка 1 курса финансово-экономического факультета
Орловского государственного института экономики и торговли
e-mail: fjfl2012@yandex.ru*

Локтионова Эльвира Анатольевна

*к. п. н., доцент кафедры математики, анализа и статистики
Орловского государственного института экономики и торговли
т: 8(4862)416145*